多目的離散最適化問題に対する代理目的の導入(離散数理と連続数理における最適化理論)

数理解析研究所講究録
1015巻 1997年 24-31

多目的離散最適化問題に対する代理目的の導入

関西大学総合情報学部　仲川勇二(Yuji Nakagawa)
高松大学経営学部　疋田光伯(Mitsunori Hikita)

1．はじめに

互いに競合する複数個の目的関数を、与えられた制約式のもとで、最大（最小）化する問題は多目的最適化問題と呼ばれ、経営科学、情報科学等の多くの分野で重要な問題が含まれる。従来、様々な多目的最適化問題が定式化され、その解法が提案されてきたが、そのほとんどが変数はすべて連続値をとるものであった。これに対して、著者らは、文献[1]で変数がすべて離散値をとる多目的最適化問題（多目的離散最適化問題）を解くためのアルゴリズムを提案した。また、文献[2]ではこのアルゴリズムが実用規模の問題のパレート最適解を与えることが報告されている。一般に、パレート最適解は単一解ではなく無限個の点集合である。実用上の問題では、これらパレート最適解の中から意思決定者の価値観に合うような単一解または適当な大きさの解集合（選好最適解）を求めなければならない。本論文では、従来の研究成果[1,2]を基にして、多目的離散最適化問題のパレート最適解を効率よく求めるために、代理目的の導入を試みたので報告する。また、代理目的を利用して対話形式でパレート曲面の近傍を探索し、選好最適解を求めるアルゴリズムの例を示し、数値例によりその有効性を明らかにする。

2．多目的離散最適化問題と代理目的

最適化の対象とする問題は、変数がすべて離散値をとる多目的最適化問題として次のように定式化される。

$$(P1):\quad \max \quad \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

$$\text{s.t.}\quad g(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} g_i(x_i) \leq b$$

ここで、$\mathbf{x}=(x_1,...,x_n)^T$ は n 次元整数変数ベクトル、$\mathbf{f}(\mathbf{x})=(f_1(\mathbf{x}),...,f_m$

$(\mathbf{x}))^T$ は m 次元ベクトル目的関数、$g(\mathbf{x})$ は制約関数である。但し、$f(\mathbf{x})$および $g(\mathbf{x})$は変数分離可能な関数である。一般にすべての目的関数を同時に最大化する解は存在しない。その代わりに、ある目的関数の値を改善するためには、少なくとも他の一つの目的関数の値を改悪せざるを得ないような解の概念としてパレート最適解が定義されている。一般に、パレート最適解は単一解ではなく無限個の点集合である。実用上の問題では、これらパレート最適解の中から意思決定者の価値観に合うような単一解または適当な大きさの解集合（選好最適解）を求めなければならない。

問題 P1 に代理乗数 $\mathbf{u}$ を導入し、複数個の目的関数の重み付き総和を単一の目的関数（これを代理目的と呼ぶ）とした問題を P2 とする。

$$(\mathrm{P2}):\quad \max \sum_{i=1}^{m} u_i f_i(x)$$

$$\mathrm{s.t.}\quad g(\mathbf{x}) \leqq b$$

ただし

$$\sum_{i=1}^{m} u_i = 1,\ u_i \geqq 0$$

問題 P2 は、重み係数法(weighting method)と呼ばれ、任意の $\mathbf{u}$ に対する問題 P2 の最適解は問題 P1 のパレート最適解であることが知られている。この方法では、問題 P2 を 1 回解いて 1 個のパレート最適解しか得ることができず、相当数のパレート最適解が必要な場合は、$\mathbf{u}$ を変化させて問題 P2 を繰り返し解かなければならないので実用的でない。

ここで、問題 P2 の最適解を $\mathbf{x}^{opt}$，目的関数の最適値を $f(\mathbf{x}^{opt})$，目的関数の最適値 $f(\mathbf{x}^{opt})$ からの許容値を ε とし、問題 P3 を次のように定義する。

$$(\mathrm{P3}):\quad \mathrm{target} \sum_{i=1}^{m} u_i f_i(\mathbf{x}) \geqq f(\mathbf{x}^{opt}) - \varepsilon$$

$$\mathrm{s.t.}\quad g(\mathbf{x}) \leqq b$$

問題 P3 は目的関数の最適値に幅を持たせて、目的関数値がその範囲内に入る実行可能解を列挙する問題である。問題 P2, 問題 P3 はモジュラーアプローチ(MA)[3]によって効率よく解くことができる。モジュラアプローチは分離可能な離散最適化問題を効率よく解くためのアルゴリズム設計法であり、計算実験によって大規模なこの種の問題を実用時間で解き得ることが文献[4,5,6]に報告されている。問題 P3 を解いて得られた実行可能解に対して問題 P1 の目的関数間の優越操作を行えばパレート最適解が得られる。

いま、問題 P3 において目的関数空間における実行可能領域を F(X) とすると、代理目的は F(X) を切断する超平面であり、許容値 ε は F(X) を切断する深さに相当する。また、代理乗数 u により超平面が F(X) を切断する方向を変化することができる。すなわち、意思決定者は u で定義される超平面（代理目的）を用いて、ε の深さで F(X) を切断することによって任意のサイズと性質のパレート最適解集合を求めることができる。問題 P3 の概念を図 1 に示す。

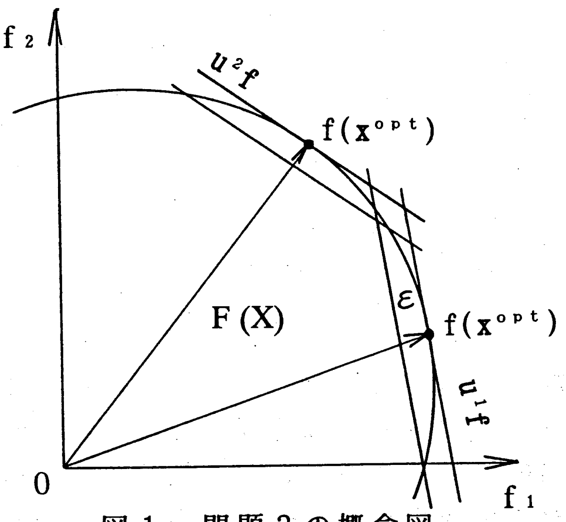

図 1　問題 3 の概念図

この方法は、パレート曲面から ε の深さで実行可能領域を切断することによって、切り取った領域のパレート最適解をまとめて効率よく列挙できる。また、ε によってある程度のパレート曲面のギャップを吸収でき、非凸な問題にも適用可能である。

3. アルゴリズム

u と ε を操作して対話形式でパレート曲面の近傍を探索し、選好最適解を求めるアルゴリズムの例を示す。

（アルゴリズム）

step1.　各目的関数を単一で使用した問題をＭＡで解き、その解 x^{opt} から各目的の上限値 $f^U(x^{opt})$ を得る。

$k \leftarrow 1$

$u^k \leftarrow (1/m,...,1/m)$

step2.　u^k で定義される問題 P2 を解き、最適解 $x^{k(opt)}$ とその目的関数値 $f(x^{k(opt)})$ を得る。意思決定者は $f(x^{k(opt)})$ からの許容値 ε を決める。

step3.　u^k と ε で定義される問題 P3 を解き、パレート最適解集合 X^k を求める。X^k のサイズが適当ならば step4へ 、さもなくば、ε を調整して、step3へ。

step4.　X^k の中に意思決定者の価値観に合う解があればそれを選好最適解として終了する。さもなくば、u^k を更新して、$k \leftarrow k+1$ とし、step2 へ戻る。

４．アルゴリズムの実行例

次に示す多目的非線形ナップザック問題を例題として、アルゴリズムの実行例を示す。

（例題）　多目的非線形ナップザック問題

$$\max \quad f(x) = \sum_{i \in I} f_{i,j}(x_i), \quad j=1,2$$

$$\text{s.t.} \quad g(x) = \sum_{i \in I} g_i(x_i) \leqq b$$

$I = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

$x_i = \{1,2,3,4,5\}, \ (i \in I)$

$b = 971$

表１　目的関数の代替案の値

$f_{i,j}(x_i)$		x_i				
j	i	1	2	3	4	5
	1	19	66	74	90	147
	2	64	122	172	176	202
	3	59	101	143	166	197
1	4	16	78	136	162	170
	5	5	27	64	81	121
	6	39	95	101	160	202
	7	23	32	61	122	163
	8	16	47	79	132	135
	9	14	18	46	78	121
	10	14	15	67	71	81
	1	28	58	116	177	214
	2	58	93	155	217	220
	3	14	66	95	111	142
2	4	23	31	78	86	119
	5	22	52	70	89	112
	6	15	18	24	55	89
	7	19	61	124	149	205
	8	25	72	84	95	110
	9	49	56	107	139	171
	10	64	126	152	155	168

表２　制約関数の代替案の値

$g_i(x_i)$	x_i				
i	1	2	3	4	5
1	48	112	114	145	157
2	62	82	89	146	209
3	14	16	53	56	74
4	2	8	24	63	66
5	26	83	138	150	209
6	52	95	97	134	177
7	58	117	167	170	206
8	8	52	72	86	105
9	26	57	117	161	173
10	51	99	154	201	219

（実行例）

各目的関数を単一で使用したときの問題をMAで解く。この目的関数値を各目的の上限値として、意思決定に利用する。

$f^U_1(\mathbf{x}^{opt})=1216$, $\mathbf{x}^{opt}=(5,3,5,5,1,5,5,4,1,1)$
$f^U_2(\mathbf{x}^{opt})=1219$, $\mathbf{x}^{opt}=(5,4,5,5,1,1,5,5,1,2)$

代理乗数を $u^1=(0.5,0.5)$とし、問題 P2 を解く。

$f(\mathbf{x}^{opt})=1185$, $\mathbf{x}^{opt}=(5,3,5,5,1,5,5,4,1,1)$

適当な大きさのパレート最適解集合を得るためにεを決定する。$\varepsilon=15$ として、問題 P3 を解き、得られた解集合に対して目的関数間の優越操作を行い次のパレート最適解を得る。

$\mathbf{x}^{opt}=(5,3,5,5,1,5,5,4,1,1)$, $f_1(\mathbf{x}^{opt})=1216$, $f_2(\mathbf{x}^{opt})=1154$, $g(\mathbf{x}^{opt})=958$
$\mathbf{x}^{opt}=(5,3,5,5,1,4,5,4,1,2)$, $f_1(\mathbf{x}^{opt})=1175$, $f_2(\mathbf{x}^{opt})=1182$, $g(\mathbf{x}^{opt})=963$
$\mathbf{x}^{opt}=(5,3,5,3,1,5,5,4,1,2)$, $f_1(\mathbf{x}^{opt})=1183$, $f_2(\mathbf{x}^{opt})=1175$, $g(\mathbf{x}^{opt})=964$

f_1が上限値(=1216)に達しているので、f_2を増やす方向に探索するため、$u^2=(0.25,\ 0.75)$として、問題 P2 を解く。

$f(\mathbf{x}^{opt})=1179.5$ $\mathbf{x}^{opt}=(5,4,5,5,1,1,5,5,1,2)$

$\varepsilon=4.5$ として、問題P3を解き、パレート最適解を得る。

$\mathbf{x}^{opt}=(5,4,5,5,1,1,5,5,1,2)$, $f_1(\mathbf{x}^{opt})=1061$, $f_2(\mathbf{x}^{opt})=1219$, $g(\mathbf{x}^{opt})=957$
$\mathbf{x}^{opt}=(5,3,5,5,1,4,5,4,1,2)$, $f_1(\mathbf{x}^{opt})=1175$, $f_2(\mathbf{x}^{opt})=1182$, $g(\mathbf{x}^{opt})=963$
$\mathbf{x}^{opt}=(5,3,5,3,1,5,5,4,1,2)$, $f_1(\mathbf{x}^{opt})=1183$, $f_2(\mathbf{x}^{opt})=1175$, $g(\mathbf{x}^{opt})=964$

f_2 が上限値(=1219)に達したので、この近傍で他のパレート最適解を列挙する。すなわち、u^3 はそのままで $\varepsilon=9.5$ としパレート曲面をより深く切断する。
問題 P3 を解き、パレート最適解を得る。

$\mathbf{x}^{opt}=(5,4,5,5,1,1,5,5,1,2)$, $f_1(\mathbf{x}^{opt})=1061$, $f_2(\mathbf{x}^{opt})=1219$, $g(\mathbf{x}^{opt})=957$
$\mathbf{x}^{opt}=(5,3,5,5,1,4,5,4,1,2)$, $f_1(\mathbf{x}^{opt})=1175$, $f_2(\mathbf{x}^{opt})=1182$, $g(\mathbf{x}^{opt})=963$

$\mathbf{x}^{opt}$=(5,3,5,3,1,5,5,4,1,2), $f_1(\mathbf{x}^{opt})$=1183, $f_2(\mathbf{x}^{opt})$=1175, $g(\mathbf{x}^{opt})$=964
$\mathbf{x}^{opt}$=(5,3,5,5,1,1,5,3,5,1), $f_1(\mathbf{x}^{opt})$=1107, $f_2(\mathbf{x}^{opt})$=1191, $g(\mathbf{x}^{opt})$=966
$\mathbf{x}^{opt}$=(5,4,5,5,1,1,5,4,2,2), $f_1(\mathbf{x}^{opt})$=1062, $f_2(\mathbf{x}^{opt})$=1211, $g(\mathbf{x}^{opt})$=969
$\mathbf{x}^{opt}$=(5,4,5,3,1,1,5,5,1,3), $f_1(\mathbf{x}^{opt})$=1079, $f_2(\mathbf{x}^{opt})$=1204, $g(\mathbf{x}^{opt})$=970

この結果 $\mathbf{x}^{opt}$=(5,4,5,3,1,1,5,5,1,3)が上限値と比較してもバランスの取れたパレート最適解であるので、これを選好最適解として採用する。

5．代理乗数の最適化

代理乗数 $\mathbf{u}$ は目的関数間のトレードオフ比を表しているので、$\mathbf{u}$ の定義域を意思決定空間と考え、対話形式で $\mathbf{u}$ の最適化を行えば、意思決定者の価値観に合ったパレート最適解を効率よく求めることができる。例えば一つの方法として、$\mathbf{u}$ の定義域を多面体で表現し、その多面体の重心を通り、意思決定者の意思を反映させた切断面で切断し、$\mathbf{u}$ の領域を縮小しながら最適な $\mathbf{u}$ を求める方法が考えられる。文献[7,8]では、多面体とその切断面が与えられたときに、縮小された新しい多面体とその頂点の質点系の重心を求めるアルゴリズムCOP(Cut-off Polyhedron)が提案されている。図２にアルゴリズムCOPの概要（多面体[$\mathbf{v}^1$,$\mathbf{v}^2$,$\mathbf{v}^3$] を切断面 CP で切ると、新しい多面体[$\mathbf{v}^1$,$\mathbf{v}^4$,$\mathbf{v}^5$,$\mathbf{v}^3$]とその重心$\mathbf{v}^*$を得る）を示す。アルゴリズム COP を意思決定空間の縮小に適用すればより実用的な意思決定システムの構築が可能と考えられる。

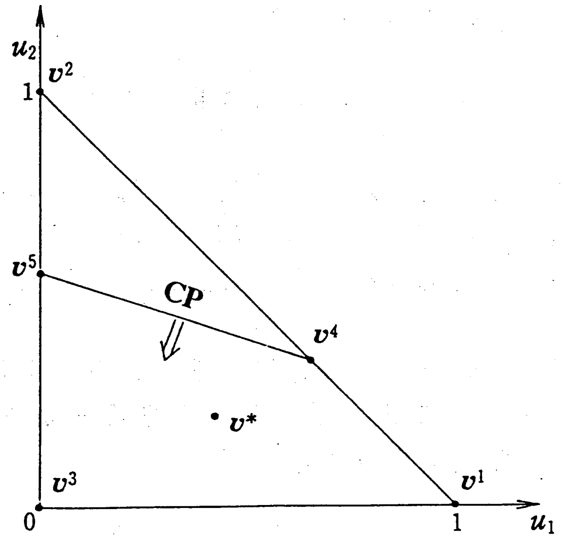

図２ アルゴリズムCOPの概要

6．おわりに

本論文では、多目的離散最適化問題に代理目的を導入することによって効率よくパレート最適解を列挙できることを示した。また、これを利用した選好最適解を求めるアルゴリズムの一例を示し、数値例によってその有用性を確かめた。さらに、目的関数の最適値からの許容値 ε によって、ある程度のパレート曲面のギャップを吸収することができ、非凸な問題にも適用可能であることを明らかにした。代理乗数 u の定義域を意思決定空間と考え、対話形式で u の最適化を行なうことによって、意思決定者の価値観をより十分に反映した選好最適解を得ることができるであろう。今後の課題としては、u の最適化による意思決定アルゴリズムの構築が残されている。

謝辞　本研究の一部は、関西大学学術研究助成基金の援助を受けて行われたものである。

参考文献

[1] 疋田，仲川，宮地:「多目的離散最適化問題を解くためのアルゴリズム」，京都大学数理解析研究所講究録，No.889，pp.125-132(1995).

[2] 疋田，仲川，伊藤，宮下，宮地:「多目的離散最適化アルゴリズムの評価」，京都大学数理解析研究所講究録，No.981，pp.64-71(1997).

[3] 仲川勇二:「離散最適化問題のための新解法」，電子情報通信学会論文誌，Vol.J73-A，No. 3，pp.550-556(1990).

[4] 仲川勇二，疋田光伯，岩崎彰典:「多重選択ナップザック問題の高速厳密解法」，電子情報通信学会論文誌，Vol. J75-A，No. 11，pp. 1752-1754 (1992).

[5] 疋田光伯，岩崎彰典，仲川勇二:「モジュラ法の非線形計画問題への適用」，電子情報通信学会論文誌，Vol. J76-A，No. 1，pp. 64-67 (1993).

[6] A.Iwasaki, M.Hikita, Y.Nakagawa and H.Narihisa: "An Application of Modular Approach to Separable Nonlinear Programming Problem"，京都大学数理解析研究所講究録，No.864，pp. 83-90(1994).

[7] 仲川，疋田，鎌田：「代理双対問題を解くためのアルゴリズム」，電子情報通信学会論文誌，Vol. J67-A，No. 1，pp. 53-59 (1984).

[8] Y.Nakagawa, M.Hikita, and H.Kamada: "Surrogate Constraints Algorithm for Reliability Optimization Problems with Multiple Constraints", IEEE Transactions on Reliability, R-33, pp.301-305 (1984).